

ЛЕКЦИЯ 6

Глава 6. МНОГОГРАННИКИ

6.1. Общие сведения о многогранниках

Одним из видов пространственных форм являются многогранники – замкнутые пространственные фигуры, ограниченные плоскими многоугольниками. Эти многоугольники образуют грани; общие стороны многоугольников называются *ребрами*; вершины многогранных углов, образованных его гранями, сходящихся в одной точке – *вершинами* многогранника.

Если вершины и ребра многогранника находятся по одну сторону от плоскости любой его грани, то многогранник называют выпуклым.

Наибольший практический интерес представляют собой призмы, пирамиды и правильные многогранники (тела Платона).

Призма – многогранник, две грани которого представляют равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами (основаниями). Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные друг другу, называют боковыми. Призму, ребра которой перпендикулярны к основаниям, называют *прямой*. Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями являются правильные многоугольники.

Пирамида – многогранник, одна грань которого – плоский n -угольник (основание), а остальные грани – треугольники с общей вершиной. Если основанием пирамиды является правильный многоугольник и высота ее проходит через центр этого многоугольника, пирамиду называют *правильной*.

Многогранник называют *правильным*, если его грани представляют собой правильные и равные многоугольники. Граниями правильных многогранников могут быть только правильные треугольники, четырехугольники (квадраты) и пятиугольники.

Существует пять видов правильных многогранников (рис. 6.1):

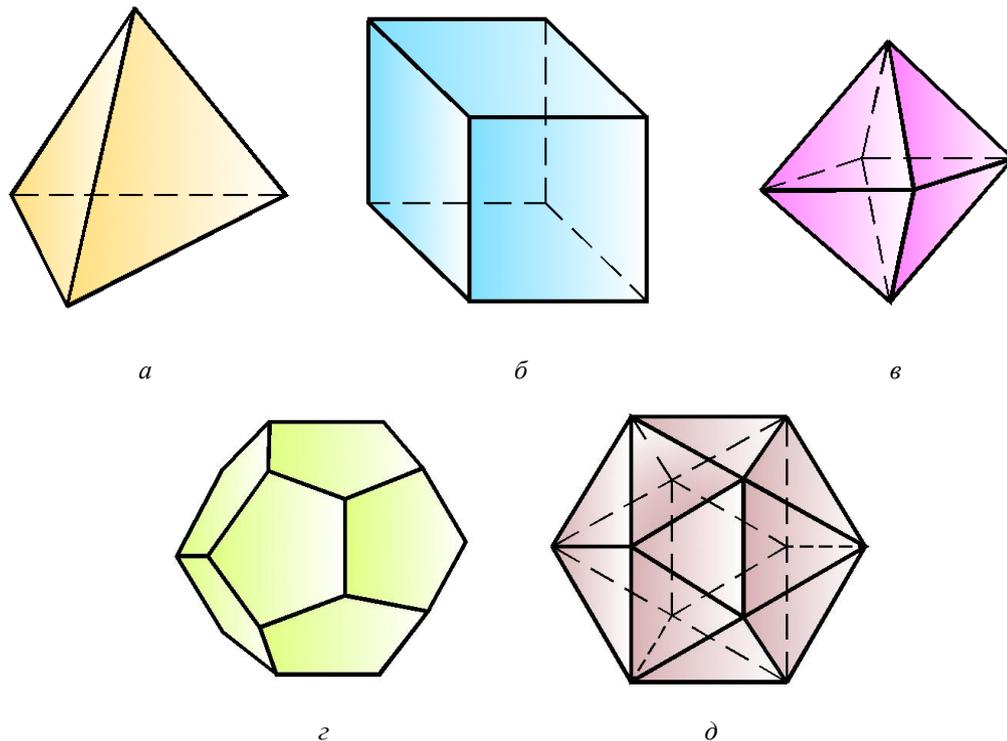


Рис. 6.1

- 1) правильный четырехгранник (тетраэдр) ограничен четырьмя равными правильными треугольниками. Представляет собой правильную пирамиду, основанием которой может быть выбрана любая из 4-х граней (рис. 6.1, а);
- 2) правильный шестигранник (гексаэдр) ограничен 6-ю равными квадратами – это куб. Представляет собой частный случай правильной призмы (рис. 6.1, б);
- 3) правильный восьмигранник (октаэдр) ограничен 8-ю равносторонними и равными треугольниками (рис. 6.1, в);
- 4) правильный двенадцатигранник (додекаэдр) ограничен 12-ю правильными и равными пятиугольниками (рис. 6.1, г);

- 5) правильный двадцатигранник (икосаэдр) ограничен 20-ю равносторонними и равными треугольниками (рис. 6.1, д).

У всякого выпуклого многогранника число граней (Γ) плюс число вершин (B) минус число ребер (P) равно двум, т. е. $\Gamma + B - P = 2$.

6.2. Точка и прямая линия на поверхности многогранника

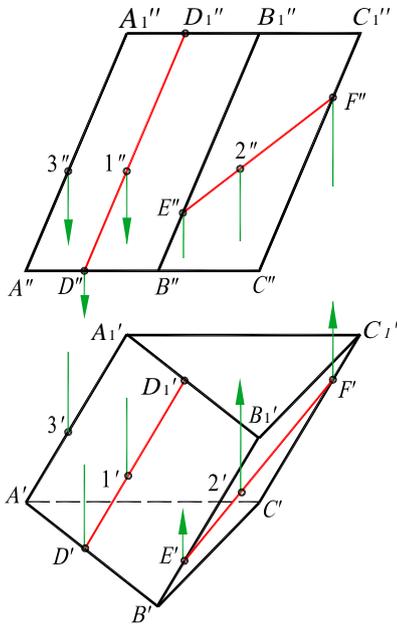


Рис. 6.2

Нахождение недостающих проекций точек, находящихся на боковой поверхности прямой призмы (рис. 6.3), упрощается, так как боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями. Так, горизонтальная проекция $1'$ точки 1, расположенной на грани AA_1BB_1 , находится на отрезке $A'B'$ ($A_1'B_1'$). Профильную проекцию точки 1 определим с помощью линий связи.

Горизонтальная проекция $2'$ точки 2, расположенной на боковом ребре BB_1 , совпадает с горизонтальной проекцией этого ребра. Профильную проекцию точки 2 построим при помощи горизонтальной линии связи.

На рис. 6.4 показано построение недостающих проекций точек, находящейся на боковой поверхности пирамиды $SABC$. Фронтальная проекция $1''$ точки 1, расположенная на грани SBC , представляющей собой профильно-проецирующую плоскость, построена с помощью линий связи.

Грани многогранника представляют собой плоскости. Поэтому построение точек и прямых на поверхности многогранника сводится к построению точек и прямых линий на плоскости.

Точки на гранях призмы и пирамиды строятся при помощи вспомогательных прямых, принадлежащих соответствующим плоскостям граней.

Чтобы определить по данной проекции $1''$ точки 1, лежащей на грани AA_1BB_1 наклонной призмы, горизонтальную проекцию $1'$ (рис. 6.2), проводим через точку $1''$ фронтальную проекцию вспомогательной прямой DD_1 , параллельную ребрам призмы. Определив горизонтальную проекцию $D'D_1'$ вспомогательной прямой, по линии связи найдем горизонтальную проекцию $1'$.

Фронтальная проекция $2''$ точки 2, лежащей на грани BB_1CC_1 , построена с помощью вспомогательной прямой EF , проведенной через проекцию $2'$. Недостающую проекцию точки 3, расположенную на ребре AA_1 , определим с помощью линии связи.

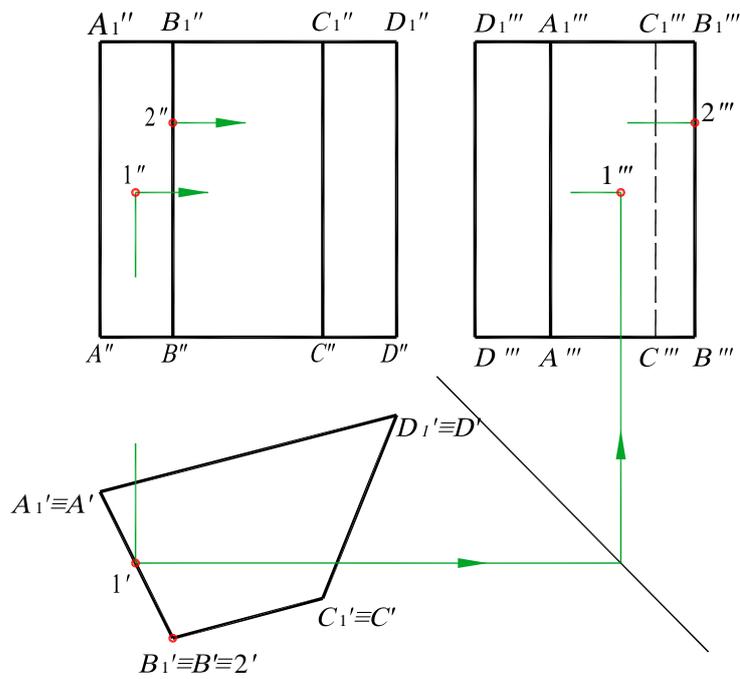


Рис. 6.3

Чтобы определить по заданной проекции $2''$ точки 2, лежащей на грани SAB , проекцию $2'$ (рис. 6.4), используем горизонталь h . Фронтальная проекция горизонтали h'' проведена через проекцию $2''$ до пересечения с проекцией $B''S''$ ребра BS в точке D'' . Горизонтальная проекция h' горизонтали h проходит через точку D' параллельно проекции $A'B'$ стороны AB .

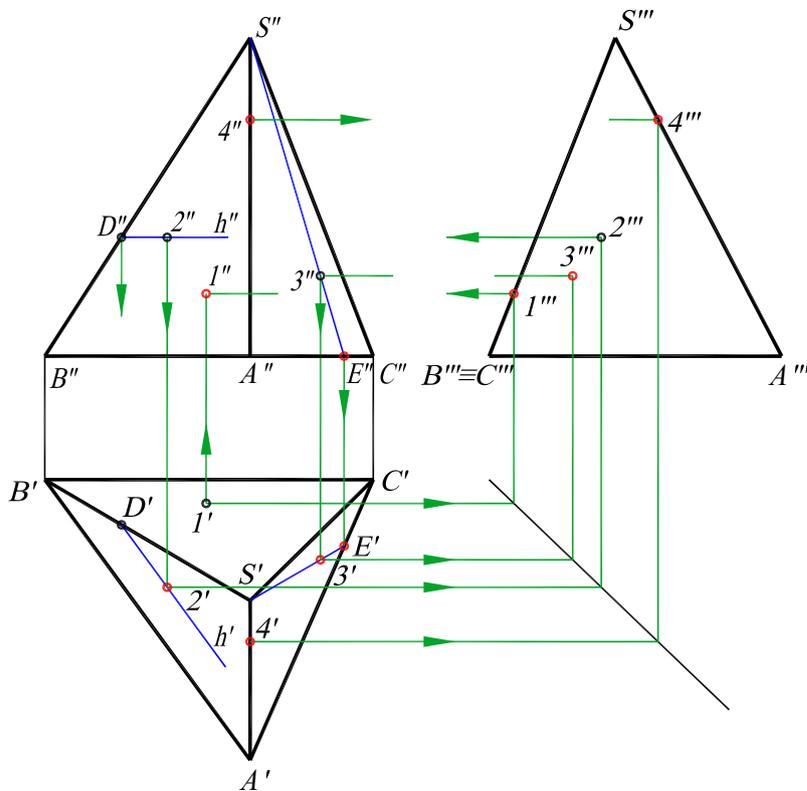


Рис. 6.4

Чтобы определить по заданной проекции $3''$ точки 3, расположенной на грани SAC , проекцию $3'$, используем прямую SE . Фронтальная проекция $S''E''$ проведена через проекцию $3''$. Построив горизонтальную проекцию $S'E'$, по линии связи найдем $3'$. Фронтальная проекция $4''$ точки 4, расположенной на

ребре SA , построена с помощью линий связи сначала на профильной проекции ребра $S'''A'''$, а затем на фронтальной $S'A'$.

6.3. Пересечение многогранников плоскостью. Развертка поверхности многогранника

6.3.1. Общие сведения

При пересечении многогранника плоскостью в сечении получается многоугольник, вершинами которого являются точки пересечения ребер многогранника плоскостью, а сторонами – отрезки прямых, по которым грани многогранника пересекаются этой плоскостью.

Определение вершин многоугольника сводится к построению точек пересечения прямых (ребер многогранника) с плоскостью – *способ ребер*.

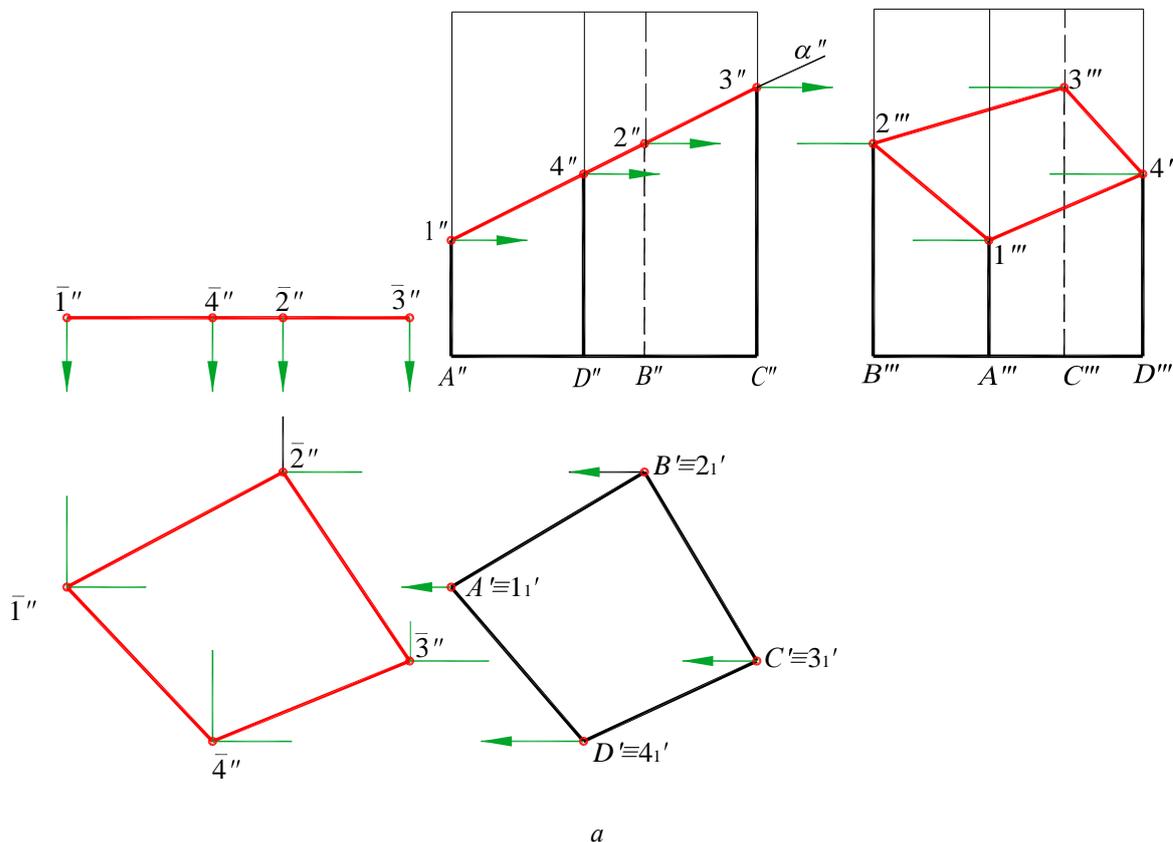
При определении сторон многоугольника решаются задачи на пересечение двух плоскостей – *способ граней*.

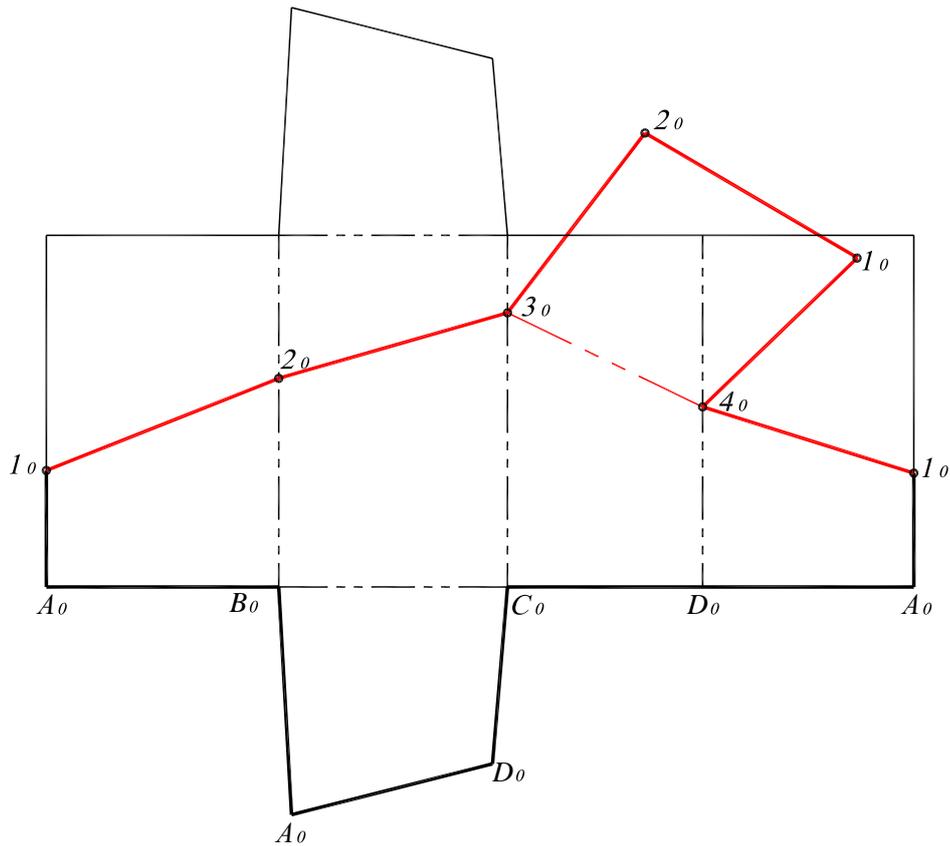
Разверткой называется фигура, полученная при совмещении поверхности геометрического тела с плоскостью (без наложения элементов поверхности друг на друга).

Развертки необходимы при изготовлении изделий из листового материала.

6.3.2. Пересечение многогранника проецирующей плоскостью

На рис. 6.5, а показано построение проекций линии пересечения прямой четырехугольной призмы фронтально-проецирующей плоскостью α (α'').





б
Рис. 6.5

Пересечение следа – проекции α'' с фронтальными проекциями боковых ребер призмы дает проекции $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ вершин многоугольника сечения. Горизонтальные проекции этих вершин совпадают с «вырожденными» проекциями соответствующих ребер, так как призма прямая. Профильные проекции $1'''$, $2'''$, $3'''$, $4'''$ вершин определим при помощи горизонтальных линий связи на соответствующих проекциях ребер призмы.

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом плоскопараллельного перемещения. Переместим фронтальную проекцию сечения в горизонтальное положение. Проекция $\overline{1'2'3'4'}$ – натуральная величина многоугольника сечения.

Развертка боковой поверхности призмы состоит из четырех прямоугольников, у которых одна сторона равна высоте призмы, а другие стороны равны сторонам основания призмы. Достроив к сторонам прямоугольника верхнее и нижнее основание призмы, получим полную развертку ее поверхности (рис. 6.5, б).

Для построения развертки боковой поверхности усеченной призмы наносим на развертку точки 1_0 , 2_0 , 3_0 , 4_0 , расположенные на соответствующих ребрах. Чтобы получить полную развертку усеченной части призмы, к одному из участков линии пересечения (3_04_0) пристраиваем натуральную величину сечения.

Развертку усеченной части призмы обводим сплошной толстой основной линией, линии сгиба – на развертке – штрихпунктирной с двумя точками линией.

На рис. 6.6, а приведено построение проекций линии пересечения четырехугольной пирамиды $SABC$ фронтально-проецирующей плоскостью α (α'').

Фронтальные проекции $1''2''3''4''$ вершин многоугольника сечения находятся в пересечении следа проекции α'' плоскости α с фронтальными проекциями боковых ребер пирамиды. Проекции $2''$ и $3''$ точек 2 и 3, лежащих на ребрах SB и SC , совпадают, так как грань SBC является фронтально-проецирующей плоскостью. Горизонтальные и профильные проекции точек 1, 2, 3, 4 определяются по линиям связи на соответствующих ребрах пирамиды.

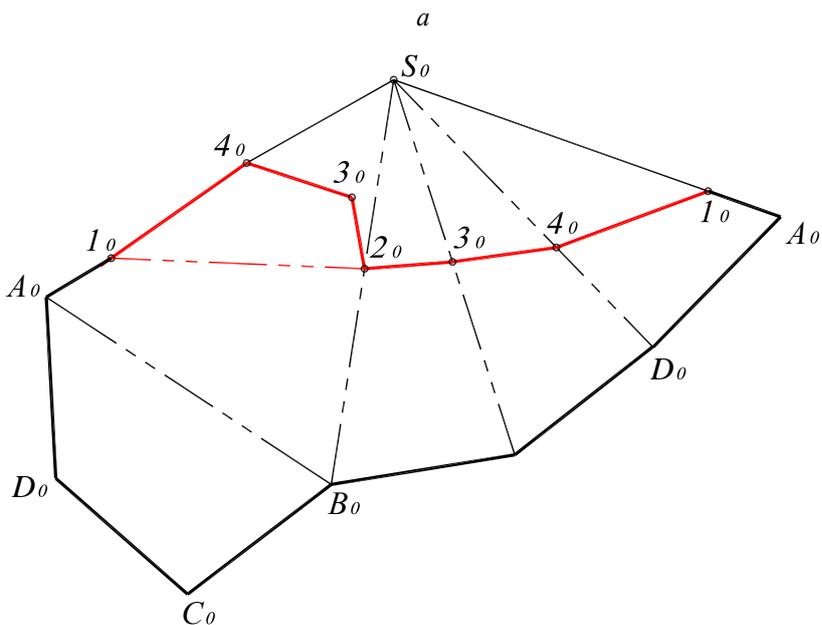
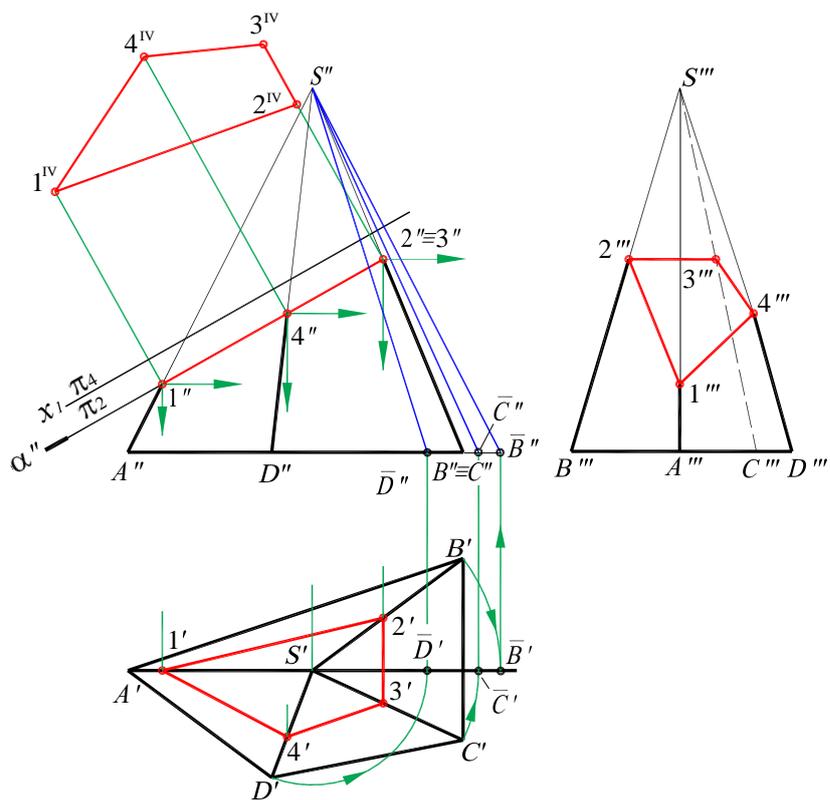


Рис. 6.6

Натуральная величина многоугольника сечения найдена способом перемены плоскостей проекций. Это четырехугольник $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$.

Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из четырех треугольников – боковых граней пирамиды.

Одна из сторон треугольников определяется величиной, соответствующей горизонтальной проекции ребра основания пирамиды, поскольку основание пирамиды занимает горизонтальное положение.

Из боковых ребер пирамиды ребро AS параллельно фронтальной плоскости и проекция $A''S''$ - его истинная величина. Для определения натуральной величины других боковых ребер используем способ вращения вокруг оси, проходящей через вершину S перпендикулярно плоскости π_1 .

Поворачиваем ребра SB , CS , SD до положения, параллельного плоскости π_2 . Длины проекций $S''\bar{B}''$, $S''\bar{C}''$, $S''\bar{D}''$ являются натуральными длинами соответствующих ребер.

На рис. 6.6, б представлено построение полной развертки усеченной части пирамиды. Вначале на плоскости чертежа строим треугольники – боковые грани пирамиды – по трем сторонам, последовательно пристраивая треугольники друг к другу боковыми ребрами. Пристроив к стороне A_0B_0 одного из треугольников четырехугольное основание пирамиды, получим полную развертку ее поверхности.

Чтобы выделить на развертке усеченную часть пирамиды, находим положение вершины 1_0 фигуры сечения на ребре A_0S_0 . Зная натуральную величину многоугольника сечения $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$, последовательно засекаем на ребрах развертки точки $2_0, 3_0$ и 4_0 , используя величину сторон многоугольника сечения. Полученные на развертке точки соединяем отрезками прямых. Пристраиваем затем натуральную величину сечения $1^{IV} 2^{IV} 3^{IV} 4^{IV}$ к одному из участков линии пересечения ($1_0 2_0$). Полученную полную развертку поверхности усеченной пирамиды обводим сплошной толстой основной линией, а линии сгиба – штрихпунктирной с двумя точками линией.

6.3.3. Пересечение многогранника плоскостью общего положения

При решении задач на построение проекций фигуры сечения многогранника плоскостью общего положения применяются вспомогательные плоскости, которые проводят через грани или ребра многогранника. В качестве вспомогательных плоскостей используют плоскости частного положения.

На рис. 6.7 приведено построение проекций линии пересечения прямой треугольной призмы плоскостью общего положения. Плоскость задана двумя пересекающимися прямыми DE и EF ($DE \parallel \pi_1$, $EF \parallel \pi_2$).

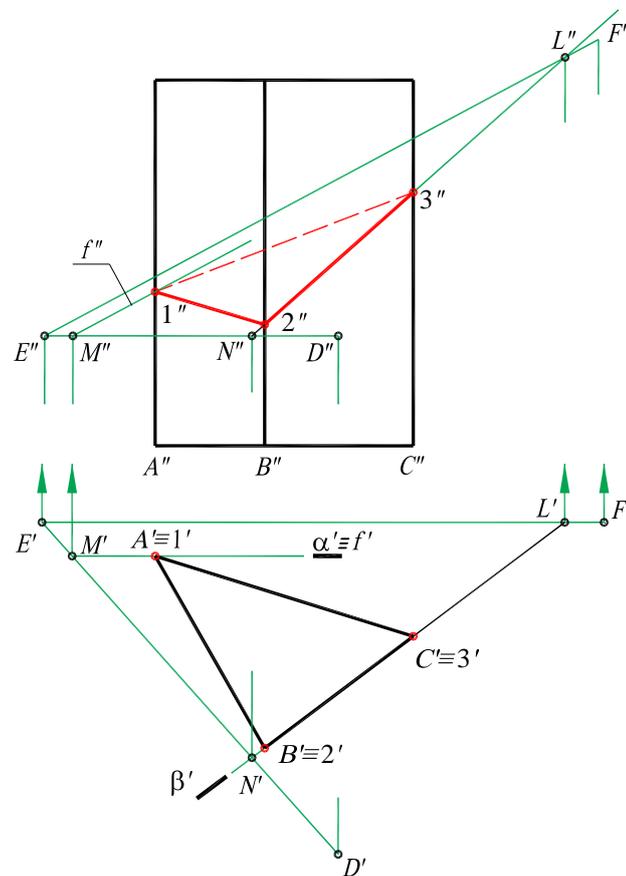


Рис. 6.7

Так как боковые грани призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями, то горизонтальная проекция $1'2'3'$ линии пересечения совпадает с горизонтальными проекциями самих граней.

Фронтальную проекцию $1''$ точки пересечения ребра A с заданной плоскостью определим при помощи фронтальной плоскости α (α'), проходящей через это ребро.

Плоскость α пересекает заданную плоскость по фронтале f , параллельной прямой EF . Фронталь f проходит через точку M прямой ED . В пересечении проекции f'' с фронтальной проекцией ребра находится проекция $1''$. Для построения фронтальной проекции $2''3''$ линии пересечения грани BC призмы с заданной плоскостью, заключаем грань во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость β (β'). Плоскость β пересекает заданную по прямой NL ($N'L', N''L''$), на фронтальной проекции которой находится $2''3''$.

$1''2''3''$ - фронтальная проекция искомой фигуры сечения. Фронтальная проекция $1''3''$ отрезка 1-2 расположена на невидимой грани и показана штриховой линией.

Для построения фигуры сечения многогранника плоскостью общего положения можно использовать один из способов преобразования чертежа, позволяющей преобразовать плоскость общего положения в проецирующую.

На рис. 6.8 дано построение проекций линий пересечения пирамиды $SABC$ плоскостью общего положения, заданной двумя пересекающимися прямыми – горизонталью ED и фронталью EF .

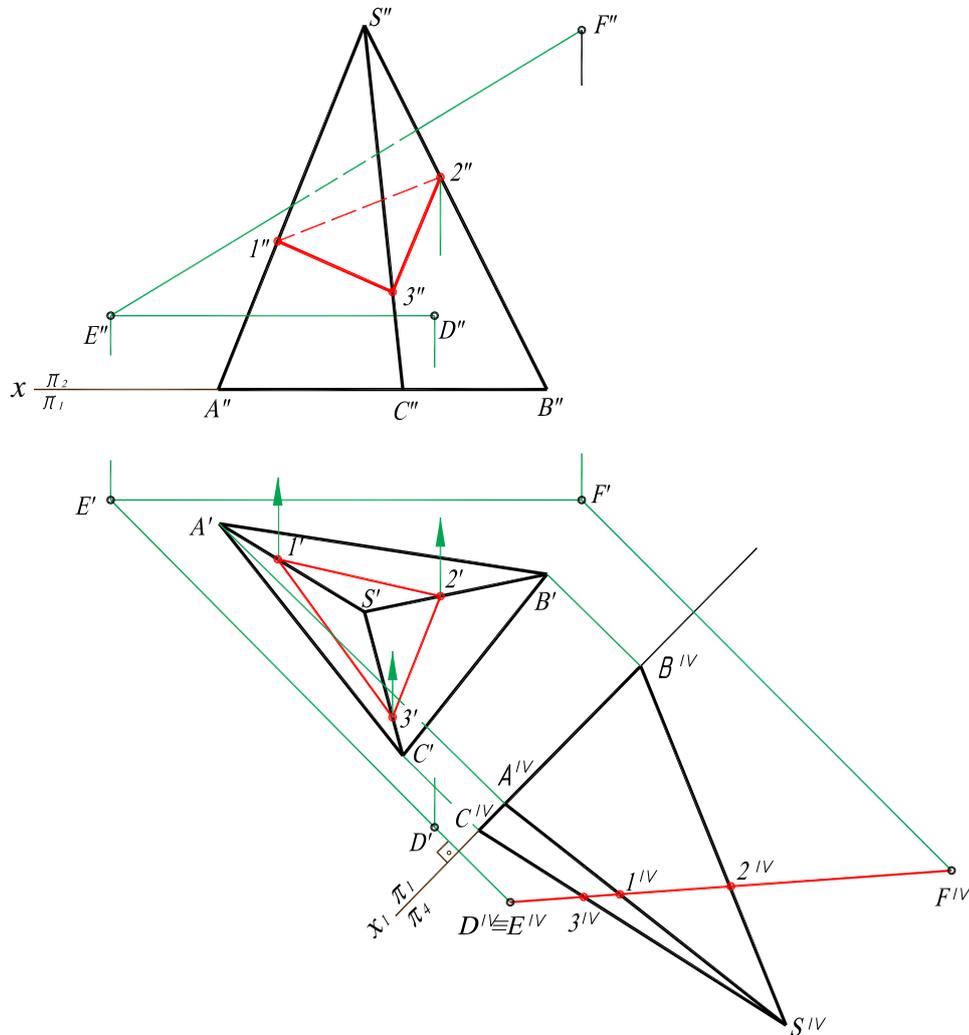


Рис. 6.8

Построение выполнено при помощи способа перемены плоскостей проекций. Дополнительная плоскость проекций π_4 , перпендикулярная плоскости π_1 , выбрана перпендикулярно горизонтали DE . При этом новая ось проекций x_1 будет расположена перпендикулярно к проекции $D'E'$.

На плоскости π_4 получим проекцию пирамиды $S^{IV}A^{IV}B^{IV}C^{IV}$, а секущая плоскость спроецируется в виде прямой, т.е. станет перпендикулярной π_4 .

На следе-проекции секущей плоскости будет находиться проекция линии пересечения $1^{IV}2^{IV}3^{IV}$.

Точка 1 расположена на ребре SA , точка 2 – на SB , точка 3 – на SC .

Путем обратного проецирования на плоскость π_1 и плоскость π_2 построим горизонтальную $1'2'3'$ и фронтальную $1''2''3''$ проекции линии пересечения.

Фронтальная проекция $1''2''$ отрезка 1-2 расположена на невидимой грани пирамиды.

6.4. Примеры решения задач

Задача 1. Правильная треугольная призма усечена двумя плоскостями: горизонтально-проецирующей α (α') и фронтально-проецирующей β (β'') (рис. 6.9). Построить профильную проекцию усеченной призмы.

Решение. Плоскость α пересекает верхнее основание призмы по прямой 4-5, а боковую поверхность по горизонтально-проецирующим прямым 1-5 и 3-4. Прямая 1-5 совпадает с ребром A призмы.

Плоскость β пересекает ребро A призмы в точке 1, а ребро C – в точке 2.
 Плоскости α и β пересекаются по линии 1-3.

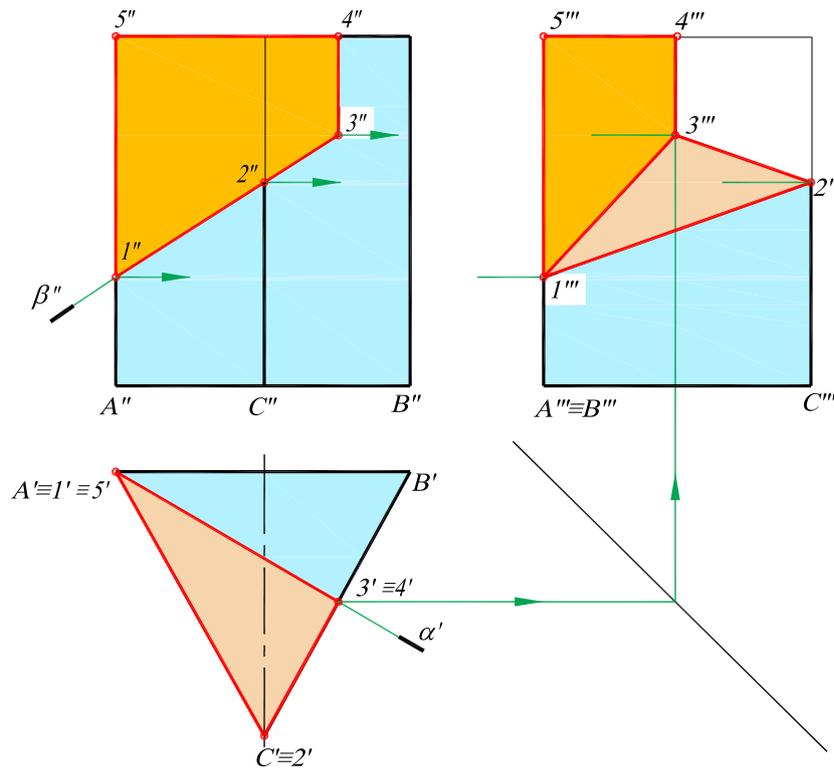


Рис. 6.9

Профильные проекции указанных выше точек определяются при помощи линий связи. Соединив построенные точки получим профильную проекцию линии пересечения.

Задача 2. Правильная треугольная пирамида усечена двумя плоскостями: фронтально-проецирующей α (α'') и профильной β (β'') (рис. 6.10). Построить недостающие проекции усеченной пирамиды.

Решение. Плоскость α пересекает грань SAC по отрезку 1-2, грань SBC по отрезку 2-3, грань SAB по отрезку 1-4.

Плоскость β пересекает грань SBC по отрезку 3-5, а грань SAB по отрезку 4-5. При построении проекций точек, принадлежащих линии пересечения, следует учитывать, что профильные проекции $S'''A'''$ и $S'''B'''$ совпадают, так как грань SAB пирамиды является профильно-проецирующей плоскостью.

Недостающие проекции точки 1, расположенной на ребре SA и точки 5, расположенной на ребре SB , построены при помощи линий связи.

Проекция точки 2, расположенной на ребре SC , определены при помощи линий связи сначала на профильной проекции ребра, а затем на горизонтальной.

Для построения горизонтальных проекций точек 3 и 4, через их фронтальную проекцию проведены вспомогательные прямые SD и SE , принадлежащие соответственно граням SBC и SAB .

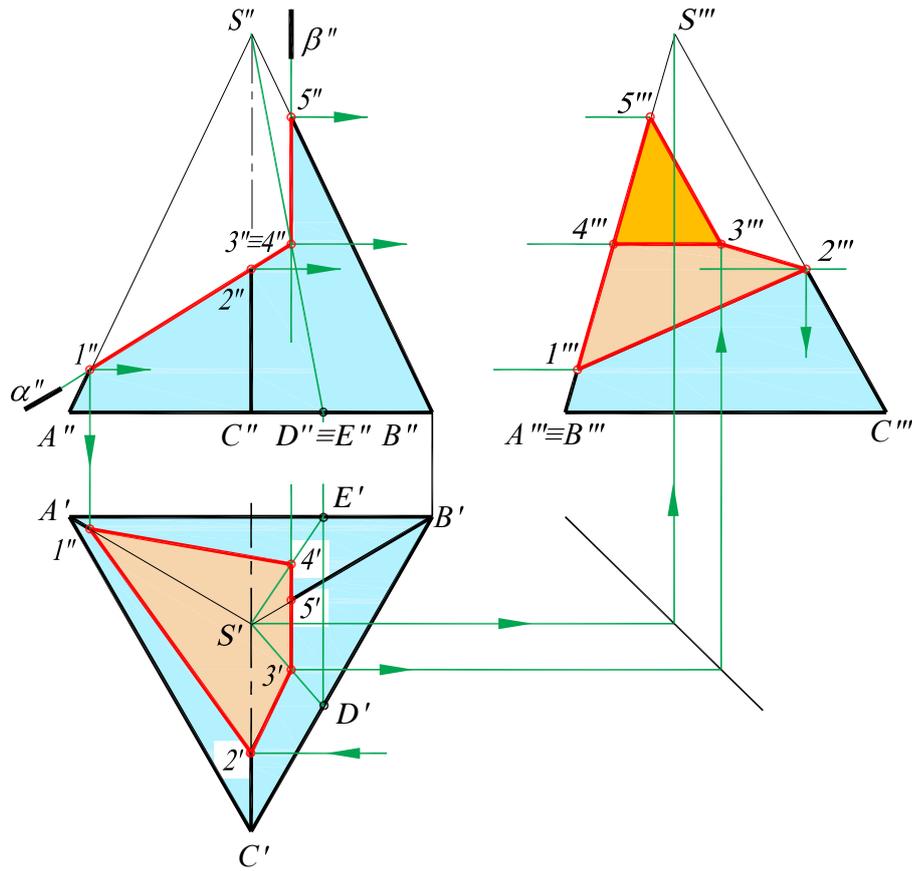


Рис. 6.10

Построив горизонтальные проекции $S'D'$ и $S'E'$ этих прямых, по линии связи определим горизонтальные проекции точек 3 и 4, а затем и их профильные проекции.

Плоскости α и β пересекаются по фронтально-проецирующей прямой 3-4. Соединив построенные проекции точек, получим проекции линии пересечения.

6.5. Вопросы для контроля

1. Какая фигура называется многогранником?
2. Дайте определение призмы, пирамиды, правильного многогранника.
3. Как определить недостающую проекцию точки на поверхности многогранника?
4. Что представляет собой сечение многогранника плоскостью?
5. В чем различие способа ребер и способа граней?
6. Как используется способ перемены плоскостей проекций при построении сечения многогранника плоскостью?